JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 3, 293–299 (1970)

Asymptotische Approximation stetiger Funktionen durch ganze Dirichlet-Reihen

LOTHAR HOISCHEN

Mathematisches Institut der Universität Gießen, West Germany

Communicated by G. Lorentz

Received October 9, 1969

Carleman [1] verschärfte 1927 den Weierstraßschen Approximationssatz für Polynome zu einer asymptotischen Approximation und zeigte, daß zu jeder auf der reellen Achse $R(-\infty < x < \infty)$ stetigen Funktion f und zu jeder auf R positiven und stetigen Funktion h eine in der ganzen komplexen z- Ebene ($z = x + iy$) analytische Funktion g mit

$$|f(x) - g(x)| < h(x) \qquad (x \in R)$$

existiert.

Neuere Beweise dieses Satzes wurden von Kaplan [4], Sinclair [8] und Hoischen [2] gegeben.

Es ist naheliegend, nach ähnlichen Approximationseigenschaften ganzer Dirichlet- Reihen zu fragen, um eine entsprechende Erweiterung des Müntzschen Satzes zu einer asymptotischen Approximation zu erhalten.

Wir beweisen hier folgenden:

SATZ. *Es sei*

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots, \qquad \lambda_n \to \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty, \qquad \lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant c > 0.$$

Dann gibt es zu jeder auf R stetigen Funktion f, für die $\lim_{s\to-\infty} f(s)$ existiert, und zu jeder auf R positiven, stetigen Funktion h mit $\lim_{s\to-\infty} h(s) > 0$ eine in der ganzen Ebene absolut konvergente Dirichletsche Reihe $\sum a_n e^{s\lambda_n}$ mit

$$\left| f(s) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n} \right| < h(s) \qquad (s \in R).$$

Natürlich genügt in diesem Satz auch die Voraussetzung, daß nur eine Teilfolge der λ_n die obigen Eigenschaften besitzt. Daher läßt sich dieser Approxi-

640/3/3-5

mationssatz auf die bekanntesten Dirichletschen Reihen anwenden, wie z. B. im Falle $\lambda_n = \log(n+1)$ oder $\lambda_n = n^\alpha (0 < \alpha \leqslant 1)$. Hierbei bleibt noch die im Hinblick auf den Müntzschen Satz interessante Frage offen, ob dieser Satz auch ohne die Voraussetzung $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant c$ gilt, oder ob diese Voraussetzung wesentlich abgeschwächt werden kann.

Mit obigen Dirichlet- Reihen läßt sich eine beliebig gute asymptotische Approximation offensichtlich nur einseitig für $s \to \infty$ erreichen, da $-\infty$ dem Entwicklungsmittelpunkt von Potenzreihen entspricht. Daher müssen über das Verhalten von $f(s)$ und $h(s)$ für $s \to -\infty$ zusätzliche Voraussetzungen gemacht werden, die im Carlemanschen Satz nicht notwendig sind. Durch diesen Satz werden insbesondere Ergebnisse von Macintyre [7] (S.286) und Kühn [5] (S.47) verbessert, die für eine Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$ mit obigen Eigenschaften die Existenz einer auf R beschränkten Dirichletschen Reihe zeigten.

Zum Beweise des obigen Satzes wird hier ein Approximationsverfahren verschärft, mit dem der Verfasser in [3] einen entsprechenden Satz für Dirichletsche Reihen herleitete, die in einer Halbebene konvergieren. Das wesentliche Hifsmittel sind dabei verallgemeinerte Bernsteinsche Polynome, für die folgender Approximationssatz gilt (Lorentz [6; S. 47]).

Lemma. *Es sei* $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots, \lambda_n \to \infty, \sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$. *Die Funktion w sei stetig auf* $[0, r]$ *mit* $r > 0$. *Dann konvergieren die Bernsteinschen Polynome*

$$B_n(w, r, x)$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \left(\frac{x}{r}\right)^{\lambda_l} \sum_{v=0}^{l} \frac{w(rb_{n,v})(-1)^{n-v} \prod_{k=v+1}^{n} \lambda_k}{(\lambda_l - \lambda_v)(\lambda_l - \lambda_{v+1}) \cdots (\lambda_l - \lambda_{l-1})(\lambda_l - \lambda_{l+1}) \cdots (\lambda_l - \lambda_n)}$$

mit

$$b_{n,v} = \left[\prod_{k=v+1}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)\right]^{1/\lambda_1} (0 \leqslant v < n), \qquad b_{n,n} = 1,$$

für $n \to \infty$ *gleichmäßig im Intervall* $[0, r]$ *gegen* $w(x)$.

Beweis des Satzes. Wir substituieren $x = e^s$ und zeigen, daß es zu jeder auf $[0, \infty)$ stetigen Funktion f und jeder auf $[0, \infty)$ positiven, stetigen Funktion h eine absolut konvergente Dirichlet-Reihe mit

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\lambda_n} \right| < h(x) \qquad (x \geqslant 0)$$

gibt. Dazu wählen wir eine monoton wachsende Folge positiver Zahlen r_i $(i = 1, 2, \ldots)$, $r_0 = 0$, mit

$$\lim_{i\to\infty} r_i = \infty$$

und

$$\lim_{i\to\infty} \frac{r_{i-1}}{r_i} = 1. \tag{1}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $h(x)$ als monoton fallend gegen 0 für $x \to \infty$ mit

$$h(r_{i+1}) < \tfrac{1}{2}h(r_i)(i = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

annehmen.

Wir konstruieren nun Bernsteinsche Polynome $P_j(x)$ mit Graden n_j $(j = 1, 2, \ldots)$ und bestimmen zusätzlich zu den n_j natürliche Zahlen k_j in folgender Weise: Es sei

$$P_1(x) = B_{n_1}(f, r_1, x).$$

Wir wählen hierbei den Grad n_1 dieses Polynoms nach obigem Lemma so groß, daß

$$|f(x) - P_1(x)| < \tfrac{1}{4}h(r_1) \quad \text{für} \qquad x \in [0, r_1]$$

ist und setzen $k_1 = n_1$.

Sind die Polynome $P_l(x)$ mit den Graden n_l sowie die natürlichen Zahlen k_l schon für $1 \leqslant l \leqslant j - 1$ $(j = 2, 3, \ldots)$ bestimmt, so setzen wir:

$$S_{j-1}(x) = \sum_{l=1}^{j-1} P_l(x) \tag{3}$$

und

$$H_{j-1}(x) = \begin{cases} d_{j-1} & \text{für} \quad x \in [0, r_{j-1}] \\ f(x) - S_{j-1}(x) & \text{für} \quad x \geqslant r_{j-1}, \end{cases}$$

wobei $d_{j-1} = f(r_{j-1}) - S_{j-1}(r_{j-1})$ ist.

Ferner setzen wir

$$M_{j-1} = \max_{0\leqslant t\leqslant r_j} |f(t)| + \max_{0\leqslant t\leqslant r_j} |S_{j-1}(t)| + |d_{j-1}|. \tag{4}$$

Die natürliche Zahl k_j wird nun so groß gewählt, daß

$$k_j > n_{j-1}, \qquad \log\frac{M_{j-1}}{\lambda_{k_j}} \leqslant 1 \tag{5}$$

ist. Wir bestimmen jetzt nach obigem Lemma ein Polynom

$$P_j(x) = B_{n_j}(H_{j-1}, r_j, x) \tag{6}$$

mit

$$|H_{j-1}(x) - P_j(x)| < \tfrac{1}{4}h(r_j) \qquad \text{für} \quad x \in [0, r_j]. \tag{7}$$

Der Grad n_j von $P_j(x)$ kann hierbei nach Definition der $b_{n,v}$ wegen $\sum_1^\infty 1/\lambda_n = \infty$ so groß gewählt werden, daß

$$n_j \geqslant k_j, \qquad r_j b_{n_j,k_j} < r_{j-1} \tag{8}$$

für $j = 2, 3,...$ ist.

Aus (3) und (6) folgt nach einfacher Rechnung, da $B_n(1, r, x) = 1$ ist (Lorentz [6; S. 46]), für $j = 2, 3,...$:

$$P_j(x) = d_{j-1} + \sum_{\substack{l \leqslant n_j \\ r_j b_{n_j,l} \geqslant r_{j-1}}} r_j^{-\lambda_l} x^{\lambda_l} \sum_{\substack{v \leqslant l \\ r_j b_{n_j,v} \geqslant r_{j-1}}}$$
$$\times \frac{[f(r_j b_{n_j,v}) - S_{j-1}(r_j b_{n_j,v}) - d_{j-1}](-1)^{n_j - v} \prod_{k=v+1}^{n_j} \lambda_k}{(\lambda_l - \lambda_v)(\lambda_l - \lambda_{v+1}) \cdots (\lambda_l - \lambda_{l-1})(\lambda_l - \lambda_{l+1}) \cdots (\lambda_l - \lambda_{n_j})}. \tag{9}$$

Wir setzen

$$F(x) = \lim_{j \to \infty} S_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j(x) \tag{10}$$

und zeigen zunächst die Konvergenz dieser Reihe.

Aus (3) und (7) folgt

$$|f(x) - S_j(x)| < \tfrac{1}{4}h(r_j) \quad \text{für} \quad x \in [r_{j-1}, r_j] (j = 1, 2,...), \tag{11}$$

und aus (3) und (11)

$$|d_j| < \tfrac{1}{4}h(r_j) \quad (j = 1, 2,...). \tag{12}$$

Es ist

$$|P_j(x)| \leqslant |P_j(x) - d_{j-1}| + |d_{j-1}|$$

und somit nach (3), (7) und (12)

$$|P_j(x)| < \tfrac{1}{4}h(r_j) + |d_{j-1}| < \tfrac{1}{4}[h(r_j) + h(r_{j-1})] \quad \text{für} \quad x \in [0, r_{j-1}], \tag{13}$$

sodaß also die Reihe in (10) nach (2) und (13) konvergiert.

Aus (2), (11) und (13) ergibt sich für $x \in [r_m, r_{m+1}]$, $j \geqslant m+1$ die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
|f(x) - S_j(x)| &\leqslant |f(x) - S_{m+1}(x)| + \sum_{v=m+2}^{\infty} |P_v(x)| \\
&< \tfrac{1}{4}h(r_{m+1}) + \sum_{v=m+2}^{\infty} \tfrac{1}{4}[h(r_v) + h(r_{v-1})] \\
&< h(r_{m+1}) \leqslant h(x).
\end{aligned}
$$

Daher besitzt $F(x)$ also die gewünschte Approximationseigenschaft

$$|f(x) - F(x)| < h(x) \quad (x \geqslant 0).$$

Als wesentlicher Teil des Beweises muß noch gezeigt werden, daß durch (10) eine für alle $s \in R$ absolut konvergente Dirichlet- Reihe $F(e^s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{s\lambda_m}$ dargestellt wird. Nach (3) und (9) ist

$$a_0 = P_1(0) + \sum_{j=1}^{\infty} d_j,$$

was nach (2) und (12) konvergiert.

Aus der Bedingung (8) folgt, daß für den Index l in (9) stets $l > k_j$ gelten muß. Daher ergibt sich aus (9) für $n_{j-1} < m \leqslant n_j$

$$
a_m = \begin{cases}
0 \quad \text{für} \quad n_{j-1} < m \leqslant k_j \\[2ex]
r_j^{-\lambda_m} \displaystyle\sum_{\substack{k_j < v \leqslant m \\ r_j b_{n_j,v} \geqslant r_{j-1}}} \\
\quad \times \dfrac{[f(r_j b_{n_j,v}) - S_{j-1}(r_j b_{n_j,v}) - d_{j-1}](-1)^{n_j - v} \prod_{k=v+1}^{n} \lambda_k}{(\lambda_m - \lambda_v)(\lambda_m - \lambda_{v+1}) \cdots (\lambda_m - \lambda_{m-1})(\lambda_m - \lambda_{m+1}) \cdots (\lambda_m - \lambda_{n_j})} \\[2ex]
\text{für} \quad k_j < m \leqslant n_j
\end{cases} \tag{14}
$$

Nach Valiron [9] fallen die gewöhnliche und die absolute Konvergenzabszisse einer Dirichlet-Reihe zusammen, falls $\log \mathrm{n} = \sigma(\lambda_n)$ ist und besitzen den Wert

$$\sigma = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\log |a_m|}{\lambda_m}.$$

Die Bedingung $\log n = \sigma(\lambda_n)$ ist hier wegen $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant c$ erfüllt.

Beachtet man zur Abschätzung von a_m in (14), daß

$$\begin{aligned} &| f(r_j b_{n_j,v}) - S_{j-1}(r_j b_{n_j,v}) - d_{j-1} | \\ &\qquad \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant r_j} |f(t)| + \max_{0\leqslant t\leqslant r_j} | S_{j-1}(t)| + | d_{j-1} | = M_{j-1} \end{aligned}$$

nach (4) ist, so folgt aus (14)

$$| a_m | \leqslant r_j^{-\lambda_m} M_{j-1} \left[\prod_{k=m+1}^{n_j} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_k}\right)\right]^{-1} \cdot \sum_{\substack{k_j < v \leqslant m \\ r_j b_{n_j,v} \geqslant r_{j-1}}} \left[\prod_{i=v}^{m-1} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)\right]^{-1} \tag{15}$$

für $k_j < m \leqslant n_j$. Es ergibt sich bei Beachtung von $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant c$ ferner die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \log \prod_{i=v}^{m-1} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)\right| &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sum_{i=v}^{m-1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^l \leqslant \frac{1}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l\lambda_m{}^l} \sum_{i=v}^{m-1} \lambda_i{}^l(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \\ &\leqslant \frac{1}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l\lambda_m{}^l} \int_0^{\lambda_m} t^l \, dt = \frac{\lambda_m}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l(l+1)} . \end{aligned}$$

Somit ist nach (15)

$$| a_m | \leqslant r_j^{-\lambda_m} M_{j-1} m e^{q\lambda_m} \left[\prod_{k=m+1}^{n_j} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_k}\right)\right]^{-1} \tag{16}$$

mit einer positiven Konstanten q. Daher folgt aus (16) bei Beachtung von (5) und $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant c$:

$$\begin{aligned} \frac{\log | a_m |}{\lambda_m} &\leqslant -\log r_j + \frac{\log M_{j-1}}{\lambda_m} + \frac{\log m}{\lambda_m} + q + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^{l-1}}{l} \sum_{k=m+1}^{n_j} \lambda_k^{-l} \\ &\leqslant -\log r_j + \mathcal{O}(1) + \sum_{k=m+1}^{n_j} \lambda_k^{-1} + \frac{1}{c} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\lambda_m^{l-1}}{l} \sum_{k=m+1}^{n_j} \lambda_k^{-l}(\lambda_{k+1} - \lambda_k) \\ &\leqslant -\log r_j + \mathcal{O}(1) + \sum_{k=m+1}^{n_j} \lambda_k^{-1} + \frac{1}{c} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\lambda_m^{l-1}}{l} \int_{\lambda_m}^{\infty} t^{-l} \, dt \\ &= -\log r_j + \mathcal{O}(1) + \sum_{k=m+1}^{n_j} \lambda_k^{-1} + \mathcal{O}(1). \end{aligned} \tag{17}$$

Durch Potenzreihenentwicklung ergibt sich leicht bei Beachtung der Bedingung $r_j b_{n_{j,m}} \geqslant r_{j-1}$ in (15) die Abschätzung

$$\sum_{k=m+1}^{n_j} \lambda_k^{-1} < \left| \log \left[\prod_{k=m+1}^{n_j} \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right) \right]^{1/\lambda_1} \right| = | \log b_{n_{j,m}} |$$

$$\leqslant \left| \log \frac{r_{j-1}}{r_j} \right|. \tag{18}$$

Damit folgt insgesamt $\sigma = -\infty$ aus (1), (17) und (18), womit der obige Satz bewiesen ist.

LITERATUR

1. T. CARLEMAN, Sur un théorème de Weierstrass, *Ark. Mat. Astronom. Fys.* **20B** (1927), 1–5.
2. L. HOISCHEN, A note on the approximation of continuous functions by integral functions, *J. London Math. Soc.* **42** (1967), 351–354.
3. L. HOISCHEN, Über die asymptotische Approximation durch analytische Funktionen mit Anwendungen in der Theorie der Integraltransformationen und Limitierungsverfahren, *Mitt. Math. Sem. Gießen* **74** (1967), 1–60.
4. W. KAPLAN, Approximation by entire functions, *Michigan Math. J.* **3** (1955–1956), 43–52.
5. J. KÜHN, Über das Wachstum reeller Potenzreihen mit wenigen Vorzeichenwechseln und über das Wachstum ganzer Dirichlet-Reihen, *Mitt. Math. Sem. Gießen* **75** (1967), 1–50.
6. G. G. LORENTZ, "Bernstein polynomials." University of Toronto Press, 1953.
7. A. J. MACINTYRE, Asymptotic paths of integral functions with gap power series, *Proc. London Math. Soc.* **2** (1952), 286–296.
8. A. SINCLAIR, A general solution for a class of approximation problems, *Pacific J. Math.* **8** (1958), 857–866.
9. G. VALIRON, Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet, *Bull. Soc. Math. France* **52** (1924), 166–174.